



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

✓ **ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO**
✓ **SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR**





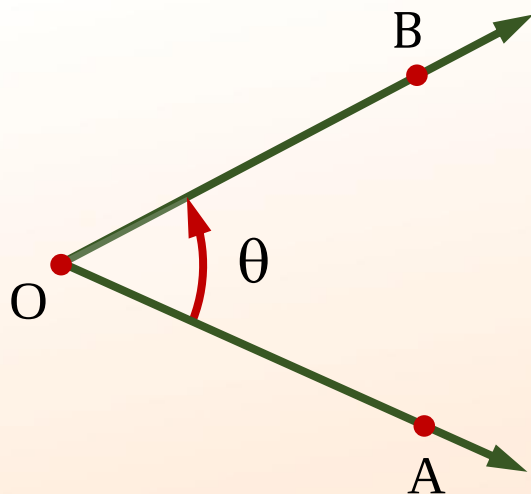
CONTENIDO

- **ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO**
- **SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR**
- **RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES ANGULARES**
- **CONVERSIÓN DE UNIDADES ANGULARES**
- **RELACIÓN NUMÉRICA ENTRE LAS MEDIDAS ANGULARES**

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Definició

Es aquel ángulo generado por la rotación de un rayo en un plano, alrededor de un punto fijo, llamado **vértice**, desde una posición inicial (**lado inicial**) hasta una posición final (**lado final**).



O : vértice

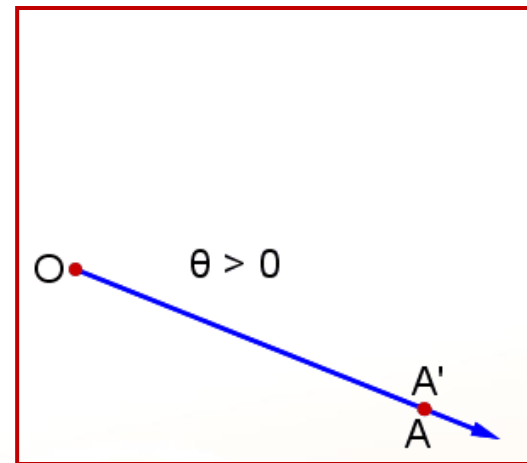
$\overrightarrow{OA}$: lado inicial

$\overrightarrow{OB}$: lado final

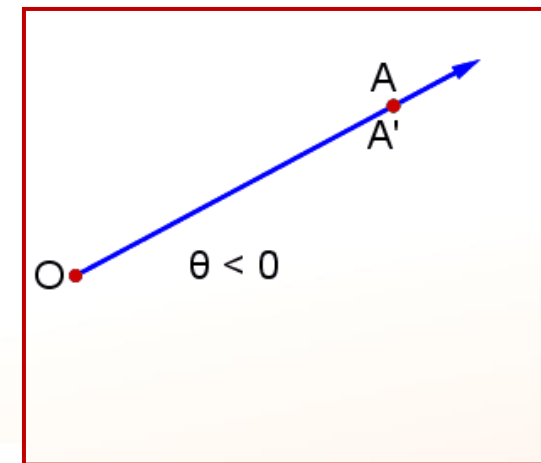
θ : medida del ángulo trigonométrico

Convención

Cuando el rayo gira en **sentido horario** se generan ángulos de medida **negativa**. Cuando el rayo gira en **sentido antihorario**, se generan ángulos de medida **positiva**.



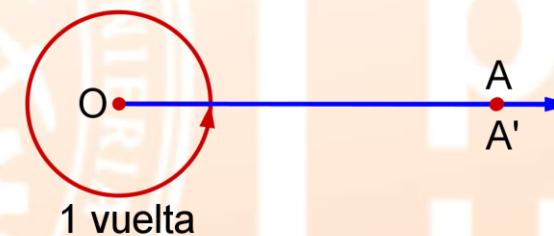
Sentido antihorario



Sentido horario

Observaciones

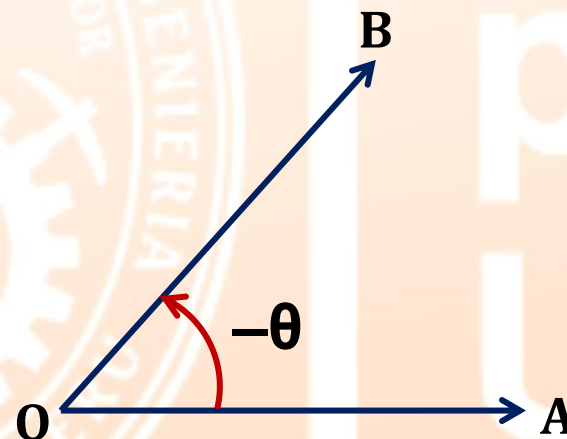
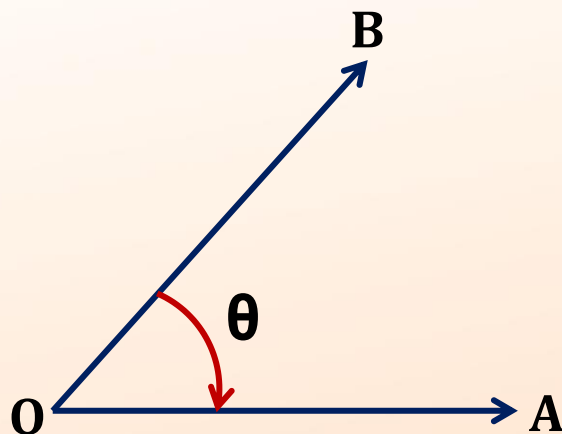
- La medida de un ángulo trigonométrico puede tomar cualquier valor real.
- Se denomina **ángulo de una vuelta** al ángulo trigonométrico que se genera cuando el rayo gira en sentido antihorario hasta que el lado final coincide por primera vez con el lado inicial.



Ángulo de una vuelta

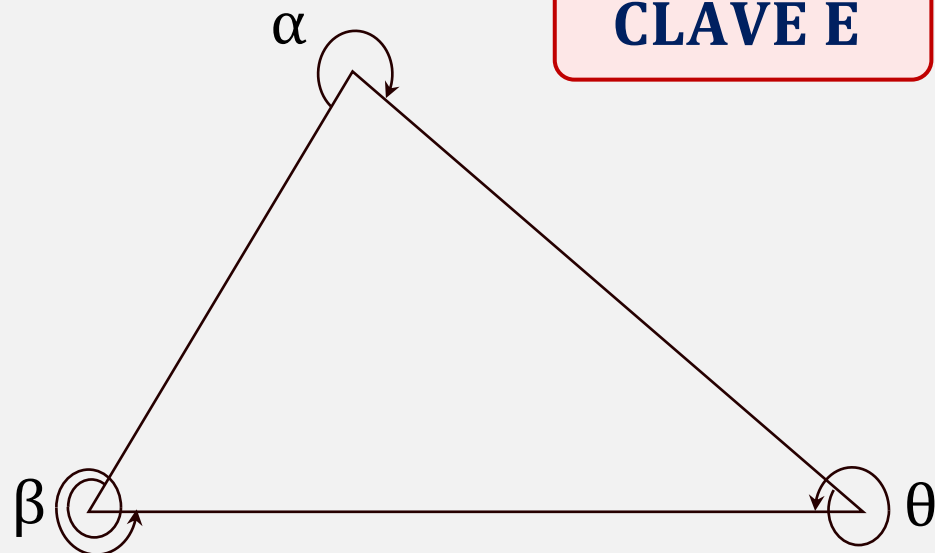
Nota

- Para realizar **operaciones aritméticas con ángulos trigonométricos**, se recomienda que los ángulos estén en un **mismo sentido** (horario o antihorario). De **preferencia** se toma ángulos trigonométricos en **sentido antihorario** para utilizar propiedades geométricas.
- Se recomienda tener en cuenta el criterio del ángulo trigonométrico opuesto:



PROBLEMA 01

De la figura mostrada, calcule el número de vueltas equivalente a $\alpha - \beta + \theta$.

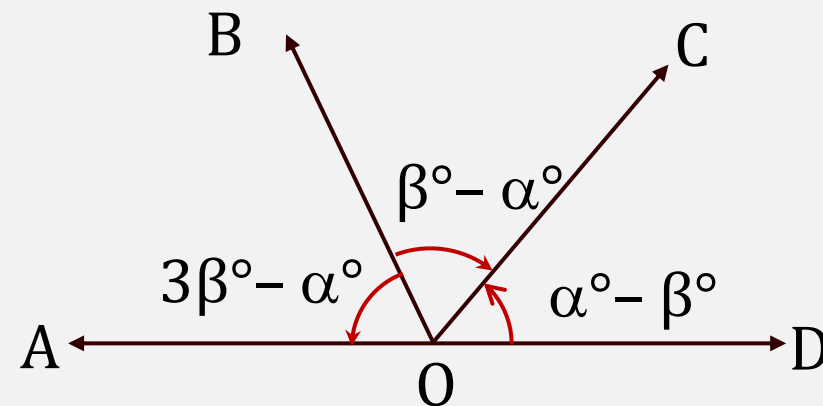


CLAVE E

- A) -2 B) -3 C) -4
D) $-1/2$ E) $-3/2$

PROBLEMA 02

En la figura mostrada, calcule el valor de α , cuando β adopta su menor valor entero.



- A) 116 B) 128 C) 134
D) 142 E) 154

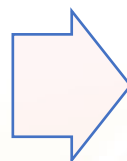
CLAVE C

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

I. SISTEMA SEXAGESIMAL O INGLÉS

Es el sistema cuya unidad fundamental de medida es el grado sexagesimal (1°), que se define como la 360ava parte del ángulo de una vuelta, es decir:

$$1^\circ = \frac{m\angle 1 \text{ vuelta}}{360}$$



$$m\angle 1 \text{ vuelta} = 360^\circ$$

En este sistema las subunidades son el **minuto** sexagesimal ($1'$) y el **segundo** sexagesimal ($1''$), donde:

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

$$1^\circ = 3600''$$

$$a^\circ = (60a)'$$

$$a' = (60a)''$$

$$a^\circ = (3600a)''$$

Nota: $a^\circ b' c'' = a^\circ + b' + c''$

II. SISTEMA CENTESIMAL O FRANCÉS

Es el sistema cuya unidad fundamental de medida es un grado centesimal (1^g), que se define como la 400ava parte del ángulo de una vuelta, es decir:

$$1^g = \frac{m \angle 1 \text{ vuelta}}{400}$$



$$m \angle 1 \text{ vuelta} = 400^g$$

En este sistema las subunidades son el **minuto** centesimal (1^m) y el **segundo** centesimal (1^s), donde:

$$1^g = 100^m$$

$$1^m = 100^s$$

$$1^g = 10000^s$$

$$a^g = 100a^m$$

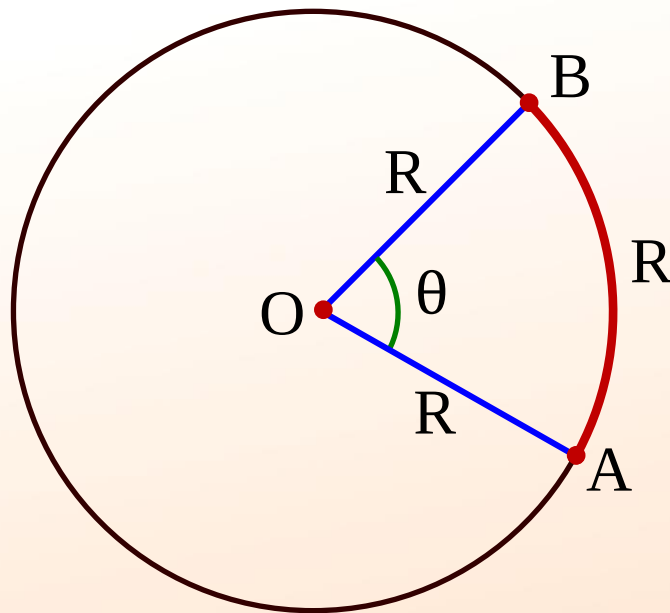
$$a^m = 100a^s$$

$$a^g = 10000a^s$$

Nota: $a^g b^m c^s = a^g + b^m + c^s$

III. SISTEMA RADIAL, CIRCULAR O INTERNACIONAL

Es el sistema cuya unidad fundamental de medida es el radián (1 rad), que se define como la medida del ángulo central en una circunferencia, que subtiende en ella un arco de igual longitud que el radio de dicha circunferencia.



En la figura: $\theta = 1\text{rad}$

Además, se demuestra que:

$$m\angle 1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ rad}$$

donde: $\pi \approx 3,141593$

RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE LOS SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

Dado que: $m \nless 1 \text{ vuelta} \leftrightarrow 360^\circ \leftrightarrow 400^g \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}$,
se reduce a:

$$180^\circ \leftrightarrow 200^g \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

o

$$9^\circ \leftrightarrow 10^g \leftrightarrow \frac{\pi}{20} \text{ rad}$$

También existe una relación entre los minutos y segundos de los sistemas sexagesimal y centesimal:

$$\begin{aligned} 9^\circ &\leftrightarrow 10^g \\ 9(60') &\leftrightarrow 10(100^m) \\ \mathbf{27'} &\leftrightarrow \mathbf{50^m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27' &\leftrightarrow 50^m \\ 27(60'') &\leftrightarrow 50(100^s) \\ \mathbf{81''} &\leftrightarrow \mathbf{250^s} \end{aligned}$$

Nota: Dado que: $m \nless 1 \text{ vuelta} \leftrightarrow 360^\circ \leftrightarrow 400^g \leftrightarrow 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \mathbf{1 \text{ rad} > 1^\circ > 1^g}$

PROBLEMA 03

Un ángulo mide $(7\pi/32)$ radianes o $\overline{3a}^\circ \overline{2b}' \overline{3c}''$. Expresar $(2a + b - c)^\circ$ en el sistema sexagesimal.

- A) 12°
- B) 15°
- C) 18°
- D) 24°
- E) 27°

CLAVE C**PROBLEMA 04**

En ciertos sistemas de medidas angulares, se tiene que una vuelta completa mide 320 grados A y en la otra una vuelta completa mide 560 grados B. Calcule x de modo que $(5x - 4)$ grados A sea equivalente a $(8x - 1)$ grados B.

- | | | |
|------|-------|------|
| A) 6 | B) 7 | C) 8 |
| D) 9 | E) 10 | |

CLAVE C

PROBLEMA 05

Si se cumple:

$$\left[\frac{(a-3)^\circ}{(a+6)^g} \right]^m = \left[\frac{(a-6)^g}{(a+3)^\circ} \right]'$$

Halle el valor positivo de a.

- A) $\sqrt{10}$
- B) $2\sqrt{10}$
- C) $3\sqrt{10}$
- D) $4\sqrt{10}$
- E) $5\sqrt{10}$

CLAVE C

PROBLEMA 06

Un ángulo trigonométrico mide 15^m o $x'y''$. Calcule $x + y$.

- A) 10
- B) 12
- C) 14
- D) 16
- E) 18

CLAVE C

PROBLEMA 07 (1era PC – 2023 – 1)

Sabiendo que:

$$28'21'' = 52^m_x^s$$

Calcule x.

- A) 45
- B) 48
- C) 50
- D) 52
- E) 54

CLAVE C**PROBLEMA 08**

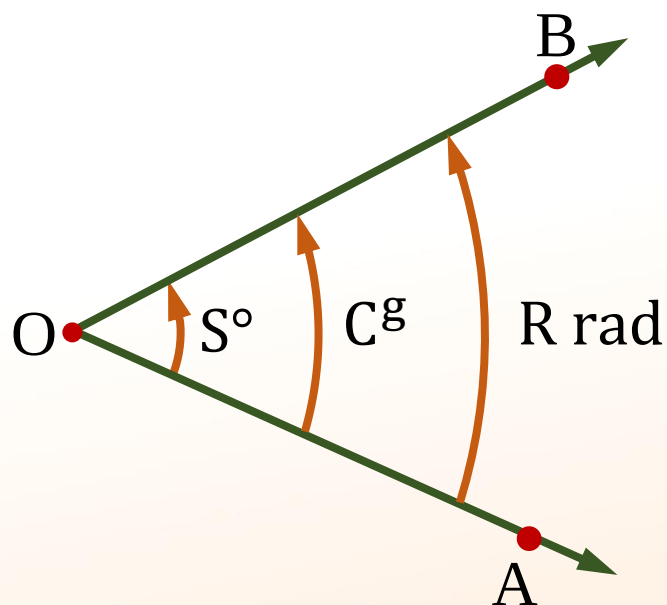
En un nuevo sistema angular la unidad de medida 1^x es la 760 avas parte del ángulo de una vuelta, además hay 2 submúltiplos 1^y y 1^z tales que 80 de ellos forman la unidad inmediata superior respectivamente. Expresar $66^g77^m88^s$ al nuevo sistema.

- A) $126^x70^y30^z$
- D) $137^x70^y50^z$
- B) $116^x40^y30^z$
- E) $126^x30^y70^z$
- C) $137^x50^y70^z$

CLAVE A

RELACIÓN NUMÉRICA ENTRE LAS MEDIDAS DE UN MISMO ÁNGULO EN LOS TRES SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

Si medimos un ángulo en los tres sistemas conocidos:



Donde:

S: número de grados sexagesimales.

C: número de grados centesimales.

R: número de radianes.

Se cumple que:

$$S^{\circ} \leftrightarrow C^g \leftrightarrow R \text{ rad}$$

de donde:

$$\frac{S^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{C^g}{400^g} = \frac{R \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$$

Reduciendo:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

También:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi}$$

Observaciones

Siendo **S** el número de grados sexagesimales, **C** el número de grados centesimales y **R** el número de radianes de un mismo ángulo; se cumple:

➤ Si el ángulo es generado en sentido antihorario: $C > S > R$

➤ Si el ángulo es generado en sentido horario: $C < S < R$

➤ De la relación general:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$S = 180t; C = 200t; R = \pi t$$

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi}$$

$$S = 9k; C = 10k; R = \frac{\pi k}{20}$$

PROBLEMA 09 (1era PC – 2023 – 1)

Si la media aritmética de los números de grados sexagesimales y centesimales que contiene un mismo ángulo es igual a 76. ¿Cuál es la medida circular de dicho ángulo?

- A) $(\pi/5)\text{rad}$
- B) $(2\pi/5)\text{rad}$
- C) $(\pi/3)\text{rad}$
- D) $(\pi/50)\text{rad}$
- E) $(2\pi/3)\text{rad}$

CLAVE B

PROBLEMA 10

Si S y C son los números que representan la cantidad de grados sexagesimales y centesimales de la medida de un mismo ángulo. Calcule el valor de:

$$\frac{(S^g + C^o)^g}{(S^o + C^g)^o}$$

- A) 181/400
- B) 181/200
- C) 181/100
- D) 200/181
- E) 400/181.

CLAVE B

PROBLEMA 11

Calcule el número de radianes R de un ángulo trigonométrico, si su número de grados sexagesimales S , cumple:

$$S^2 - 10nS + 29n^2 - 20n + 25 = 0$$

- A) $\frac{5\pi}{36}$ B) $\frac{3\pi}{10}$ C) $\frac{5\pi}{72}$
D) $\frac{4\pi}{15}$ E) $\frac{7\pi}{18}$

CLAVE C

PROBLEMA 12

Si S y C representan los números de grados sexagesimales y centesimales que contiene un ángulo, los cuales verifican:

$$S = 54 \left(x^7 + \frac{1}{8} \right)$$

$$C = 15 \left(x^7 + \frac{1}{3} \right)$$

Calcule la medida de dicho ángulo en radianes.

- A) $\pi/12$ B) $\pi/15$ C) $\pi/18$
D) $\pi/24$ E) $\pi/48$

CLAVE E

PROBLEMA 13

Sean S, C y R las medidas en grados sexagesimales, grados centesimales y radianes de un mismo ángulo, respectivamente, y cumplen:

$$\frac{5S + R - 3}{3C + R + 7} + \frac{3C + R + 7}{5S + R - 3} = 2$$

Calcule el número de radianes de dicho ángulo.

- A) $\pi/40$ B) $\pi/35$ C) $\pi/30$
D) $\pi/20$ E) $\pi/15$

CLAVE C

PROBLEMA 14

Sean S, C y R las medidas en grados sexagesimales, grados centesimales y radianes de un mismo ángulo, respectivamente, y cumplen:

$$\left(\frac{C}{2} - \frac{S}{3}\right)^2 - \frac{80R}{\pi} > 0$$

Calcule el menor valor posible (en radianes) para dicho ángulo positivo, sabiendo que S y C son números enteros.

- A) $\pi/20$ B) $\pi/15$ C) $\pi/12$
D) $\pi/10$ E) $\pi/9$

CLAVE D

OBSERVACIONES:

1. Relación entre los números de grados, minutos y segundos de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal.

Sistema	# de grados	# de minutos	# de segundos
Sexagesimal	S	60S	3600S
Centesimal	C	100C	10000C

2. Relación entre los números de grados sexagesimales, centesimales y radianes del complemento y el suplemento de un mismo ángulo en los tres sistemas.

Sistema	Medida	Complemento	Suplemento
Sexagesimal	S	$90 - S$	$180 - S$
Centesimal	C	$100 - C$	$200 - C$
Radial	R	$\frac{\pi}{2} - R$	$\pi - R$

PROBLEMA 15

Si un ángulo mide **m** minutos sexagesimales o **n** minutos centesimales, siendo:

$$n = 2(m - 40)$$

Calcule el número de radianes de dicho ángulo.

A) $\frac{\pi}{36}$

B) $\frac{\pi}{24}$

C) $\frac{\pi}{21}$

D) $\frac{\pi}{20}$

E) $\frac{\pi}{18}$

CLAVE D**PROBLEMA 16**

Si la suma de los números de unidades del suplemento en el sistema sexagesimal y el complemento en el sistema centesimal de un ángulo es igual al número de grados sexagesimales del mismo, calcule el suplemento de su mitad.

A) $\frac{5\pi}{6}$ rad

B) $\frac{7\pi}{24}$ rad

C) $\frac{4\pi}{5}$ rad

D) $\frac{3\pi}{4}$ rad

E) $\frac{2\pi}{3}$ rad

CLAVE D

PROBLEMA 17

Se tiene dos ángulos complementarios donde el triple del número de grados centesimales de uno de ellos excede al doble del número de grados sexagesimales del otro en 12. Calcule la diferencia entre dichos ángulos, en radianes.

- A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{12}$
D) $\frac{\pi}{15}$ E) $\frac{\pi}{18}$

CLAVE B

PROBLEMA 18

Se tiene dos ángulos positivos, tal que la diferencia del número de minutos centesimales de uno de ellos con el número de minutos sexagesimales del otro es 400; además sus números de grados sexagesimales y centesimales del segundo y primero se diferencian en 10. Calcule la diferencia de estos ángulos en radianes.

- A) $\frac{\pi}{46}$ B) $\frac{\pi}{20}$ C) $\frac{5\pi}{72}$
D) $\frac{7\pi}{72}$ E) $\frac{\pi}{8}$

CLAVE C

PROBLEMA 19

Sea un ángulo cuya medida en los sistemas de medición sexagesimal y centesimal está dado por los números S y C , respectivamente, además se cumple que:

$$(C - S)x^2 + x^2 = x^4 + 1, x > 0$$

Calcule el número de minutos sexagesimales de dicho ángulo, siendo el menor posible.

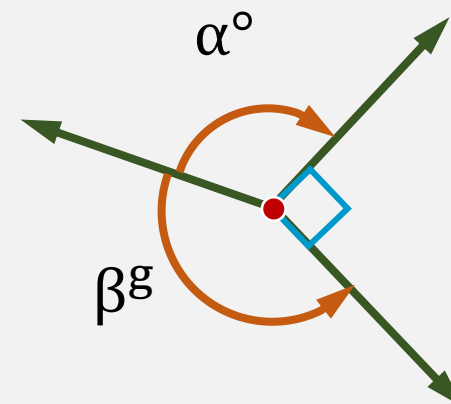
- A) 180 B) 270 C) 360
D) 450 E) 540

CLAVE E

PROBLEMA 20

En la figura mostrada se cumple:

$$\beta = \frac{1500x}{x^2 + 6x + 4}, x > 0$$



CLAVE B

Calcule α , si β adopta su mayor valor posible.

- A) - 120 B) - 135 C) - 150
D) 120 E) 135